Curve rettificabili

Una curva piana è una funzione $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ definita su un intervallo $\mathcal{I} = [a, b]$ e tale che le funzioni $x : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ sono continue. Ricordiamo che una partizione dell'intervallo $[a, b]$ è un insieme finito $\mathcal{P}$ di punti distinti di $[a, b]$:

$$\mathcal{P} = \{t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_{n-1} < t_n\}$$

tale che

$$t_0 = a \qquad \text{e} \qquad t_n = b.$$

Per ogni partizione $\mathcal{P}$ definiamo

$$L(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)^2 + \big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2}.$$

Più in generale, date una curva continua

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$$

e una partizione $\mathcal{P}$ di $[a, b]$, definiamo

$$L(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \big|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big|.$$

Lemma 1. *Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ una curva continua e siano $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ due partizioni di $[a, b]$. Dimostrare che se $\mathcal{Q}$ è più fine di $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$), allora $L(\mathcal{Q}) \geq L(\mathcal{P})$.*

Definizione 2. *Diciamo che una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ è rettificabile, se l'insieme*

$$\big\{L(\mathcal{P}) \;:\; \mathcal{P} \;\; \text{è una partizione di} \;\; [a, b]\big\}$$

è limitato superiormente. Se questo è il caso, la lunghezza della curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ è data da

$$L(\gamma; [a, b]) = \sup\big\{L(\mathcal{P}) \;:\; \mathcal{P} \;\; \text{è una partizione di} \;\; [a, b]\big\}.$$

Teorema 3. *Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ una curva di classe C^1 su $[a, b]$ (ovverlo le componenti di γ sono funzioni reali di classe C^1 su $[a, b]$). Allora, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ è rettificabile e*

$$L(\gamma; [a, b]) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Dimostrazione: Supponiamo che $d = 2$ e che

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big),$$

dove x e y sono funzioni di classe C^1 su $[a, b]$. Allora, la funzione

$$|\gamma'| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} : [a, b] \to \mathbb{R}$$

è una funzione continua e quindi Riemann integrabile su $[a, b]$. In particolare, vale il seguente lemma.

Lemma 1: Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$$

di $[a, b]$, più fine di $\mathcal{P}$, e tale che

$$S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) < \varepsilon,$$

dove $S(\mathcal{P})$ e $s(\mathcal{P})$ sono le somme di Riemann

$$S(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) \max_{t \in [t_{j-1}, t_j]} |\gamma'(t)|,$$

$$s(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) \min_{t \in [t_{j-1}, t_j]} |\gamma'(t)|.$$

In particolare, per ogni scelta di punti

$$z_j \in (t_{j-1}, t_j) \quad \text{per} \quad j = 1, \dots, n,$$

si ha che

$$\Big| \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt - \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) \big|\gamma'(z_j)\big| \Big| < \varepsilon.$$

Inoltre, ogni partizione più fine di $\mathcal{P}$ ha le stesse proprietà.

Calcolo di $L(\mathcal{P})$. Sia

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$$

una partizione di $[a, b]$. Per il teorema di Lagrange, per ogni $1 \le k \le n$, esistono punti z_k e w_k tali che

$$t_{k-1} < z_k < t_k \qquad \text{e} \qquad x'(z_k) = \frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}},$$

$$t_{k-1} < w_k < t_k \qquad \text{e} \qquad y'(w_k) = \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}.$$

Ora calcoliamo $L(\mathcal{P})$

$$\begin{aligned}
L(\mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)^2 + \big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(z_k))^2 (t_k - t_{k-1})^2 + (y'(w_k))^2 (t_k - t_{k-1})^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sqrt{(x'(z_k))^2 + (y'(w_k))^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sqrt{(x'(z_k))^2 + (y'(z_k))^2} \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \Big(\sqrt{(x'(z_k))^2 + (y'(w_k))^2} - \sqrt{(x'(z_k))^2 + (y'(z_k))^2} \Big)
\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\Big| L(\mathcal{P}) - \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) |\gamma'(z_k)| \Big| \le \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \Big| \sqrt{(x'(z_k))^2 + (y'(w_k))^2} - \sqrt{(x'(z_k))^2 + (y'(z_k))^2} \Big|$$

Ora, stimiamo la sommatoria a destra

$$\begin{aligned}
&\left|\sqrt{(x'(z_k))^2+(y'(w_k))^2}-\sqrt{(x'(z_k))^2+(y'(z_k))^2}\right| \\
&\qquad = \frac{\left|\left((x'(z_k))^2+(y'(w_k))^2\right)-\left((x'(z_k))^2+(y'(z_k))^2\right)\right|}{\sqrt{(x'(z_k))^2+(y'(w_k))^2}+\sqrt{(x'(z_k))^2+(y'(z_k))^2}} \\
&\qquad = \frac{\left|(y'(w_k))^2-(y'(z_k))^2\right|}{\sqrt{(x'(z_k))^2+(y'(w_k))^2}+\sqrt{(x'(z_k))^2+(y'(z_k))^2}} \\
&\qquad \leq \frac{\left|(y'(w_k))^2-(y'(z_k))^2\right|}{\sqrt{(y'(w_k))^2}+\sqrt{(y'(z_k))^2}} \leq \big||y'|(w_k)-|y'|(z_k)\big|.
\end{aligned}$$

Siccome $|y'| : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua su $[a,b]$, abbiamo che

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

se $s, t \in [a,b]$ sono tale che $|s-t| \leq \delta$, allora $\big||y'|(s)-|y'|(t)\big| \leq \varepsilon$.

Lemma 2: Per ogni partizione $\mathcal{P}$ esiste una partizione $\mathcal{Q}$ più fine di $\mathcal{P}$ tale che

$$\left|L(\mathcal{Q})-\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt\right| \leq (1+b-a)\varepsilon.$$

Dimostrazione: Sia $\varepsilon > 0$. Scegliamo $\delta > 0$ tale che $\big||y'|(s)-|y'|(t)\big| \leq \varepsilon$ per ogni coppia di punti s, t a distanza $\leq \delta$. Sia $\mathcal{P}_{cont}$ una qualsiasi partizione in intervalli di lunghezza $\leq \varepsilon$. Sia $\mathcal{P}_{int}$ la partizione data dal Lemma 1. Sia

$$\mathcal{Q} = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b\}$$

una qualsiasi partizione più fine di $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_{cont}$ e $\mathcal{P}_{int}$. Allora,

$$\begin{aligned}
\left|L(\mathcal{Q})-\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt\right| &\leq \left|\sum_{k=1}^n (t_k-t_{k-1})|\gamma'(z_k)|-\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt\right| \\
&\qquad + \left|L(\mathcal{Q})-\sum_{k=1}^n (t_k-t_{k-1})|\gamma'(z_k)|\right| \\
&\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^n (t_k-t_{k-1})\big||y'(z_k)|-|y'(w_k)|\big| \\
&\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^n (t_k-t_{k-1})\varepsilon = (1+b-a)\varepsilon,
\end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione di Lemma 2. $\square$

Come corollario di Lemma 2 abbiamo che per ogni partizione $\mathcal{P}$

$$L(\mathcal{P}) \leq \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $\mathcal{Q}$ piu fine di $\mathcal{P}$ tale che

$$L(\mathcal{P}) \leq L(\mathcal{Q}) \leq \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt + \varepsilon(1+b-a).$$

Siccome ε è arbitrario, abbiamo che

$$L(\mathcal{P}) \leq \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

Di conseguenza, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ ha lunghezza finita e

$$\text{lunghezza}(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Inoltre, usando di nuovo Lemma 2, abbiamo che esiste una successione di partizioni $\mathcal{Q}_n$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} L(\mathcal{Q}_n) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Si ha quindi che

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \leq \sup\Big\{L(\mathcal{Q}) \ : \ \mathcal{Q} \ - \ \text{partizione di } [a,b]\Big\}.$$

Si ha quindi che

$$\text{lunghezza}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt,$$

il che conclude la dimostrazione del teorema. □

Corollario 4 (La lunghezza di un arco di cerchio)**.** *Sia* $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$*. Allora,*

$$L(\gamma; [0,\theta]) = \theta \quad \textit{per ogni} \quad \theta > 0.$$

In particolare, $L(\gamma; [0, 2\pi]) = 2\pi$*.*